

# Оцінки найкращих $m$ -членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій

А. С. Сердюк<sup>1</sup>, Т. А. Степанюк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут математики НАН України, Київ

<sup>2</sup>Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

## Анотація

В метриках просторів  $L_s$ ,  $1 \leq s \leq \infty$ , одержано точні за порядком оцінки знизу найкращих  $m$ -членних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій, що належать одиничній кулі простору  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , з твірним ядром  $\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , коефіцієнти  $\psi(k)$  якого прямують до нуля не повільніше за геометричну прогресію. Знайдені оцінки збіглися за порядком із наближеннями частинними сумами Фур'є вказаних класів функцій в  $L_s$ -метриці, що дозволило також записати точні порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників зазначених класів.

In metric of spaces  $L_s$ ,  $1 \leq s \leq \infty$ , we obtain exact in order estimates of best  $m$ -term trigonometric approximations of classes of convolutions of periodic functions, that belong to unit ball of space  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , with generated kernel  $\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , whose coefficients  $\psi(k)$  tend to zero not slower than geometric progression. Obtained estimates coincide in order with approximation by Fourier sums of the given classes of functions in  $L_s$ -metric. This fact allows to write down exact order estimates of best orthogonal trigonometric approximation and trigonometric widths of given classes.

Нехай  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , — простір  $2\pi$ -періодичних сумовних в  $p$ -му степені на  $[0, 2\pi)$  функцій  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  з нормою

$$\|f\|_p := \left( \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_\infty$  — простір  $2\pi$ -періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  з нормою

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — функція із  $L_1$ , ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де  $\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ ,  $\psi(k)$  — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і  $\beta$  — фіксоване дійсне число. Тоді якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx + \frac{\beta\pi}{2} \text{sign} k)}$$

є рядом Фур'є деякої функції  $\varphi$  з  $L_1$ , то цю функцію називають  $(\psi, \beta)$ -похідною функції  $f$  і позначають через  $f_{\beta}^{\psi}$  (див., наприклад, [1, с. 132]). Множину функцій  $f$  у яких існує  $(\psi, \beta)$ -похідна позначають через  $L_{\beta}^{\psi}$ .

Розглянемо одиничну кулю  $B_p$  в просторі дійснозначних функцій з  $L_p$ , тобто множину функцій  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таких, що  $\|\varphi\|_p \leq 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Якщо  $f \in L_{\beta}^{\psi}$  і крім того  $f_{\beta}^{\psi} \in B_p$ , то кажуть, що функція  $f$  належить класу  $L_{\beta,p}^{\psi}$ .

Підмножини неперервних функцій із  $L_{\beta}^{\psi}$  та  $L_{\beta,p}^{\psi}$  будемо позначати через  $C_{\beta}^{\psi}$  та  $C_{\beta,p}^{\psi}$  відповідно.

У випадку коли  $\psi(k) = k^{-r}$ ,  $r > 0$ , класи  $L_{\beta,p}^{\psi}$  є відомими класами Вейля-Надя  $W_{\beta,p}^r$ .

Послідовності  $\psi(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , що визначають класи  $L_{\beta,p}^{\psi}$ , зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел  $\mathbb{N}$  деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій  $\psi(t)$ ,  $t \geq 1$  таких, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ . Множину всіх таких функцій  $\psi(t)$  будемо позначати через  $\mathfrak{M}$ .

Наслідуючи О.І. Степанця (див., наприклад, [1, с. 160]), кожній функції  $\psi \in \mathfrak{M}$  поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2), \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

де  $\psi^{-1}$  — обернена до  $\psi$  функція і покладемо

$$\mathfrak{M}_{\infty}^{+} = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi; t) \uparrow \infty, t \rightarrow \infty\}.$$

Через  $\mathfrak{M}_{\infty}'$  позначимо підмножину функцій  $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$  для яких величина  $\eta(\psi; t) - t$  обмежена зверху, тобто існує стала  $K > 0$  така, що  $\eta(\psi; t) - t \leq K$ ,  $t \geq 1$ .

Як впливає з [2, с. 1698] функції з множини  $C_{\beta}^{\psi}$ , де  $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}'$ , складаються із тих і тільки тих  $2\pi$ -періодичних функцій  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які допускають аналітичне продовження в смугу  $|\text{Im} z| \leq c$ ,  $c > 0$  комплексної площини. Отже, класи  $C_{\beta,p}^{\psi}$  є класами аналітичних функцій.

Природними представниками функцій з множини  $\mathfrak{M}_{\infty}'$  є функції  $\psi(t) = \exp(-\alpha t^r)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $r \geq 1$ .

Нехай  $f \in L_s$  і  $\gamma_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , — довільний набір із  $m$  цілих чисел. Величину

$$e_m(f)_s = \inf_{\gamma_m} \inf_{c_k \in \mathbb{C}} \|f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} c_k e^{ikx}\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad (1)$$

називають найкращим  $m$ -членним тригонометричним наближенням функції  $f$  в метриці простору  $L_s$ . В більш загальній ситуації величини виду (1) при  $s = 2$  були введені

С.Б. Стечкінім [3] з метою встановлення критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів.

Для довільного класу  $F$  із  $L_s$  покладемо

$$e_m(F)_s := \sup_{f \in F} e_m(f)_s, \quad 1 \leq s \leq \infty. \quad (2)$$

Порядки спадання до нуля при  $n \rightarrow \infty$  величин (2) при  $F = L_{\beta,p}^\psi$  для різних співвідношень між параметрами  $p$  і  $s$  за умови  $\psi \in B$ , де  $B$  — множина незростаючих додатних функцій  $\psi(t)$ ,  $t \geq 1$ , для кожної з яких існує додатня стала  $K$  така, що  $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K$ ,  $t \geq 1$ , та при деяких додаткових умовах на функцію  $\psi$  досліджувались у роботах [4]–[6].

В даній роботі розглядається задача про знаходження точних порядкових оцінок величин  $e_m(L_{\beta,p}^\psi)_s$ ,  $1 \leq p, s \leq \infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  у випадку коли  $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ .

Окрім величин  $e_m(F)_s$  в роботі для класів  $F = L_{\beta,p}^\psi$  розглядаються величини вигляду

$$e_m^\perp(F)_s = \sup_{f \in F} \inf_{\gamma_m} \|f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} \hat{f}(k) e^{ikx}\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad m \in \mathbb{N},$$

які називають найкращими ортогональними тригонометричними наближеннями класу  $F = L_{\beta,p}^\psi \subset L_s$  в метриці простору  $L_s$ , а також величини

$$d_m^\top(F)_s := \inf_{\gamma_m} \sup_{f \in F} \inf_{c_k \in \mathbb{C}} \|f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} c_k e^{ikx}\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty,$$

які називають тригонометричними поперечниками класу  $F$  в метриці простору  $L_s$ .

Позначимо через  $\mathcal{E}_n(F)_s$  наближення сумами Фур'є класу  $F \subset L_s$  в метриці простору  $L_s$ , тобто величини вигляду

$$\mathcal{E}_n(F)_s = \sup_{f \in F} \|f(x) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \hat{f}(k) e^{ikx}\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty.$$

З означень величин  $e_m(F)_s$ ,  $e_m^\perp(F)_s$ ,  $d_m^\top(F)_s$  і  $\mathcal{E}_n(F)_s$  випливає, що при  $m = 2n, 2n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  мають місце нерівності

$$e_m(F)_s \leq \frac{e_m^\perp(F)_s}{d_m^\top(F)_s} \leq \mathcal{E}_n(F)_s. \quad (3)$$

Зазначимо, що величини  $e_m(F)_s$ ,  $e_m^\perp(F)_s$ ,  $d_m^\top(F)_s$  і  $\mathcal{E}_n(F)_s$  для різноманітних класів функцій  $F$  як однієї, так і багатьох змінних вивчалися багатьма авторами. З детальною історією досліджень цих величин та відповідною бібліографією можна ознайомитись, наприклад, в роботах [7]–[12].

**Теорема 1.** *Нехай  $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ ,  $1 \leq p, s \leq \infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді мають місце порядкові оцінки*

$$e_{2n}(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp e_{2n-1}(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp \psi(n). \quad (4)$$

**Доведення теореми.** В силу теореми 6.8.2 роботи [10, с. 48], якщо  $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ , то

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp \psi(n), \quad 1 \leq p, s \leq \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Згідно зі співвідношеннями (3) і (5) одержуємо

$$e_{2n}(L_{\beta,p}^\psi)_s \leq e_{2n-1}(L_{\beta,p}^\psi)_s \leq C_0 \psi(n), \quad 1 \leq p, s \leq \infty,$$

де  $C_0$  — деяка додатня стала. Знайдемо відповідну оцінку знизу для величини  $e_{2n}(L_{\beta,p}^\psi)_s$ . Доозначимо послідовність  $\psi(k)$  у точці  $k = 0$  за допомогою рівності  $\psi(0) = \psi(1)$ . Розглянемо функцію

$$f^*(t) = f^*(\psi; n; t) := C_1 \left( \frac{\psi(1)}{2(n+A)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2} \cos kt \right),$$

де  $C_1$  та  $A$  — деякі додатні сталі, які будуть визначені пізніше.

Оскільки

$$\begin{aligned} \|(f^*)_\beta^\psi(t)\|_p &= C_1 \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k+A)^2} \cos \left( kt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_p \leq \\ &\leq 2\pi C_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k+A)^2}, \end{aligned}$$

то очевидно, що вибравши сталу  $C_1$  так, щоб  $2\pi C_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k+A)^2} \leq 1$ , отримаємо включення  $f^* \in L_{\beta,p}^\psi$ . Покажемо, що

$$e_{2n}(f^*)_s \geq C_2 \psi(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

де  $C_2$  — деяка додатня стала.

З цією метою скористаємось співвідношенням двоїстості (див., наприклад, [13, с. 42])

$$e_m(f)_s = \inf_{\gamma_m} \sup_{\substack{h \in L^\perp(\gamma_m), \\ \|h\|_{s'} \leq 1}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h(t) dt \right|, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

де  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ , а запис  $h \in L^\perp(\gamma_m)$  означає, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{ikt} dt = 0, \quad k \in \gamma_m.$$

Для довільного набору  $\gamma_{2n}$  із  $2n$  цілих чисел візьмемо довільне ціле число  $k^*$  таке, що  $k^* \in [-n, n]$  і  $k^* \notin \gamma_{2n}$ . Покладемо

$$T(t) := \frac{1}{2\pi} e^{-ik^*t}.$$

Очевидно, що  $T \in L^\perp(\gamma_{2n})$  і  $\|T\|_{s'} \leq 1$ ,  $1 \leq s \leq \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ , а отже в силу співвідношення (7) та рівності

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{imt} dt = \begin{cases} 0, & k+m \neq 0, \\ 2\pi, & k+m = 0, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z},$$

отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}
e_{2n}(f^*)_s &= \inf_{\gamma_{2n}} \sup_{\substack{h \in L^\perp(\gamma_{2n}), \\ \|h\|_{s'} \leq 1}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t) h(t) dt \right| \geq \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t) T(t) dt \right| = \\
&= \frac{C_1}{4\pi} \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k| \leq n} \frac{\psi(|k|)}{(n - |k| + A)^2} e^{-ikt} e^{-ik^*t} dt \right| = \frac{C_1}{2} \inf_{\gamma_{2n}} \frac{\psi(|k^*|)}{(n - |k^*| + A)^2} \geq \\
&\geq \frac{C_1}{2} \min_{0 \leq k \leq n} \frac{\psi(k)}{(n - k + A)^2} = \frac{C_1}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\psi(k)}{(n - k + A)^2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Покажемо, що функція  $\psi_n(t) = \frac{\psi(t)}{(n-t+A)^2}$  при певному виборі сталої  $A$  не зростає на проміжку  $[1, n]$ . Легко бачити, що

$$\begin{aligned}
\psi'_n(t) &= \left( \frac{\psi(t)}{(n-t+A)^2} \right)' = \frac{2\psi(t)}{(n-t+A)^3} + \frac{\psi'(t)}{(n-t+A)^2} = \\
&= \frac{\psi(t)}{(n-t+A)^3} \left( 2 - \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} (n-t+A) \right), \quad \psi'(t) := \psi'(t+0).
\end{aligned} \tag{9}$$

Далі скористаємось тим, що для  $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$  за умови  $\mu(t) \geq b > 0$  має місце нерівність (див. [14, с. 1251])

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \leq 4 \left( 1 + \frac{1}{b} \right) (\eta(t) - t), \quad t \geq 1. \tag{10}$$

Оскільки  $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ , то існує стала  $K_0 > 0$ , така, що  $\eta(t) - t \leq K_0$ , а отже

$$\mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t} \geq \frac{1}{\eta(t) - t} \geq \frac{1}{K_0} \tag{11}$$

і застосовуючи (10) при  $b = \frac{1}{K_0}$ , маємо

$$\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} \geq \frac{1}{4(K_0 + 1)(\eta(t) - t)} \geq \frac{1}{4(K_0 + 1)K_0}. \tag{12}$$

Враховуючи (12), отримуємо

$$2 - \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} (n - t + A) \leq 2 - \frac{1}{4(K_0 + 1)K_0} (n - t + A) \leq 2 - \frac{A}{4(K_0 + 1)K_0}. \tag{13}$$

З (9) і (13) випливає, що при  $A \geq 8K_0(K_0 + 1)$  справедлива нерівність  $\psi'_n(t) \leq 0$ ,  $t \geq 1$ , тобто функція  $\psi_n(t)$  не зростає. Тому

$$\min_{1 \leq k \leq n} \frac{\psi(k)}{(n - k + A)^2} = \frac{\psi(n)}{A^2}. \tag{14}$$

З (8) та (14) отримуємо (6). Теорему доведено.

Теорема 1 разом зі співвідношеннями (3) та (5) дозволяють записати наступне твердження.

**Теорема 2.** Нехай  $\psi \in \mathfrak{M}_\infty'$ ,  $1 \leq p, s \leq \infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $m \in \mathbb{N}$ . Тоді

$$e_m(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp d_m^\top(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp \psi\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]\right),$$

де запис  $[a]$  означає цілу частину дійсного числа  $a$ .

## Література

- [1] СТЕПАНЕЦ А.И. *Методы теории приближений*. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — 40. — Ч.І. — 427 с. (Праці Інституту математики НАН України; Т.40)
- [2] СТЕПАНЕЦ А.И., СЕРДЮК А.С., ШИДЛИЧ А.Л. Классификация бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 2008. — 60, №12. — С. 1686–1708.
- [3] СТЕЧКИН С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — 102, № 1. — С. 37–40.
- [4] ФЕДОРЕНКО О.С. Наближення  $(\psi, \beta)$ -диференційовних функцій тригонометричними поліномами: Автореф. дисертації ... канд. фіз.-мат. наук. — К.: Ін-т математики НАН України, 2001. — 16 с.
- [5] ФЕДОРЕНКО А.С., ФЕДОРЕНКО О.С. Найкращі  $m$ -членні тригонометричні наближення класів  $L_{\beta,p}^{\psi}$  в рівномірній метриці // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ, 2003. — 46. — С. 276–282.
- [6] ФЕДОРЕНКО А.С., ФЕДОРЕНКО О.С. Найкращі  $m$ -членні тригонометричні наближення класів  $L_{\beta,p}^{\psi}$  у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2004. — 56, №1. — С.129–132.
- [7] РОМАНЮК А.С. Наилучшие  $M$ -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — 67, № 2. — С. 61–100.
- [8] РОМАНЮК А.С. Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. — 2007. — 81, №2. — С. 247–261.
- [9] РОМАНЮК А.С. *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*. — Київ, 2012. — 352 с. (Праці Ін-ту математики НАН України, Т. 93).
- [10] СТЕПАНЕЦ А.И. *Методы теории приближений*: В 2ч. Ч.ІІ. — Київ, 2002. — 468 с. (Праці Інституту математики НАН України; Т.40).
- [11] РОМАНЮК В.С. Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ, 2003. — 46. — С. 131–135.
- [12] ГРАБОВА У.З., СЕРДЮК А.С. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів  $(\psi, \beta)$  – диференційовних функцій // Укр. мат. журн. — 2013. — 65, №9. — С.1186 – 1197.

- [13] КОРНЕЙЧУК Н.П. Точные константы в теории приближения. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 424 с.
- [14] СЕРДЮК А.С., СТЕПАНЮК Т.А. Оцінки найкращих наближень класів нескінченно диференційовних функцій в рівномірній та інтегральних метриках // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, №9. — С.1244–1256.

E-mail: [serdyuk@imath.kiev.ua](mailto:serdyuk@imath.kiev.ua), [tania\\_stepaniuk@ukr.net](mailto:tania_stepaniuk@ukr.net)